文系：ｐ.２３～４３　　理系：ｐ.２３～４３
練習，節末問題，章末問題Ａの解説

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習23]

(1)　右辺$=(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)+(3a^2b-3ab^2)=a^3-b^3=$左辺

よって　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(2)　右辺$=\left(a^2+ab+\dfrac{b^2}{4}\right)+\dfrac{3}{4}b^2=a^2+ab+b^2=$左辺

よって　$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$

(3)　左辺$=1+3x+3x^2+x^3$

右辺$=1+x+x+x^2+x(1+2x+x^2)$

$=1+3x+3x^2+x^3$

左辺と右辺が同じ式になるから

$(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習24]

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned}a^2+ca-(b^2+bc)&=a^2-(a+b)a-b^2+b(a+b)\\&=a^2-a^2-ab-b^2+ab+b^2\\&=0\end{aligned}$$

よって　$a^2+ca=b^2+bc$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習25]

$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$ であるから

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=ab(-c)+bc(-a)+ca(-b)+3abc\\&=-abc-abc-abc+3abc\\&=0\end{aligned}$$

よって　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習26]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

(1)　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

$\dfrac{2a-3c}{2b-3d}=\dfrac{2bk-3dk}{2b-3d}=\dfrac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

(2)　$\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2+d^2}=\dfrac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2}=k^2$

$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2k^2}{b^2}=k^2$

よって　$\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習27]

$(3x-4y)-(x-2y)=2x-2y=2(x-y)$

$x>y$ であるから　$x-y>0$

よって　$(3x-4y)-(x-2y)>0$

したがって　$3x-4y>x-2y$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習28]

$$\begin{aligned}(xy+6)-(3x+2y)&=xy-3x-2y+6\\&=x(y-3)-2(y-3)\\&=(x-2)(y-3)\end{aligned}$$

$x>2$，$y>3$ より

$x-2>0$，$y-3>0$

であるから　$(x-2)(y-3)>0$

よって　$(xy+6)-(3x+2y)>0$

したがって　$xy+6>3x+2y$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習29]

(1)　$$\begin{aligned}(x^2+9y^2)-6xy&=x^2-6xy+9y^2\\&=(x-3y)^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$x^2+9y^2\geqq 6xy$

等号が成り立つのは，$x-3y=0$ すなわち $x=3y$ のときである。

(2)　$$\begin{aligned}(a+b)^2-4ab&=a^2+2ab+b^2-4ab\\&=a^2-2ab+b^2\\&=(a-b)^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$(a+b)^2\geqq 4ab$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ すなわち $a=b$ のときである。

(3)　$$\begin{aligned}(2x^2+9y^2)-6xy&=x^2+x^2-6xy+9y^2\\&=x^2+(x-3y)^2\end{aligned}$$

$x^2\geqq 0$，$(x-3y)^2\geqq 0$ であるから　$x^2+(x-3y)^2\geqq 0$

よって　$2x^2+9y^2\geqq 6xy$

等号が成り立つのは，$x=0$ かつ $x-3y=0$，すなわち $x=y=0$ のときである。

(4)　$$\begin{aligned}a^2-ab+b^2&=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2\\&=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\end{aligned}$$

$\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2\geqq 0$，$\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ であるから　$\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$

よって　$a^2-ab+b^2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-\dfrac{b}{2}=0$ かつ $b=0$，すなわち $a=b=0$ のときである。

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習30]

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(1+x)^2-(\sqrt{1+2x})^2&=(1+2x+x^2)-(1+2x)\\&=x^2>0\end{aligned}$$

よって　$(1+x)^2>(\sqrt{1+2x})^2$

$1+x>0$，$\sqrt{1+2x}>0$ であるから

$1+x>\sqrt{1+2x}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習31]

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a-b|^2&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)\\&=2(|ab|+ab)\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$(|a|+|b|)^2\geqq|a-b|^2$

$|a|+|b|\geqq 0$，$|a-b|\geqq 0$ であるから

$|a|+|b|\geqq|a-b|$

等号が成り立つのは，$|ab|=-ab$　すなわち　$ab\leqq 0$ のときである。

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習32]

(1)　$a>0$，$\dfrac{4}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係

により

$$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

よって　　$a+\frac{4}{a}\geqq 4$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $a=\frac{4}{a}$，すなわち $a=2$ のときである。

(2)　$\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$

よって　　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$

等号が成り立つのは，$a>0$，$b>0$ かつ $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$，すなわち $a=b$ のときである。

p.32　問題

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題9]

(1)　右辺$=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-2=x^2+\frac{1}{x^2}=$左辺

よって　　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

(2)　右辺$=\left(x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)-3x-\frac{3}{x}=x^3+\frac{1}{x^3}=$左辺

よって　　$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題10]

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ であるから

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=a^2+b^2+\{-(a+b)\}^2+2\{ab-b(a+b)-(a+b)a\}\\&=2a^2+2b^2+2ab+2(-a^2-b^2-ab)\\&=0\end{aligned}$$

よって　　$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題11]

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$，$c=dk$

よって　　$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{mbk+ndk}{mb+nd}=\frac{k(mb+nd)}{mb+nd}=k$

$\frac{a}{b}=k$ であるから　　$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{a}{b}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題12]

$$\begin{aligned}(ax+by)-(bx+ay)&=ax+by-bx-ay\\&=a(x-y)-b(x-y)\\&=(a-b)(x-y)\end{aligned}$$

$a<b$，$x<y$ であるから

$$a-b<0,\ x-y<0$$

よって

$(a-b)(x-y)>0$　すなわち　$(ax+by)-(bx+ay)>0$

したがって　　$ax+by>bx+ay$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題13]

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned}\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2&=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)\\&=a-2\sqrt{ab}+b\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって　　$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2\geqq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\sqrt{2(a+b)}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから

$$\sqrt{2(a+b)}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題14]

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

ここで，$\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

よって　　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 4$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題15]

(前半)

$x>0$ のとき $\frac{9}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+\frac{9}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=2\cdot3=6$$

等号が成り立つのは，$x>0$ かつ $x=\frac{9}{x}$，すなわち $x=3$ のときである。

よって，$x>0$ のとき，$x+\frac{9}{x}$ の最小値は 6 であり，最小値をとるときの x の値は 3 である。

(後半)

$x>2$ のとき，$x-2>0$，$\frac{1}{x-2}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{x-2}&=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2\\&\geqq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4\end{aligned}$$

等号が成り立つのは，$x>2$ かつ $x-2=\frac{1}{x-2}$，すなわち $x=3$ のときである。

よって，$x>2$ のとき，$x+\frac{1}{x-2}$ の最小値は 4 であり，最小値をとるときの x の値は 3 である。

答　(ア)　6　　(イ)　3　　(ウ)　4　　(エ)　3

p.33　章末問題A

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題1]

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}-2}{5-2^2}=\sqrt{5}-2$$

(1)　$x+\frac{1}{x}=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}+2)=2\sqrt{5}$

(2)　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{5})^2-2=18$

(3)　$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=(2\sqrt{5})^3-3\cdot2\sqrt{5}=40\sqrt{5}-6\sqrt{5}=34\sqrt{5}$

別解　(3)　$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=2\sqrt{5}(18-1)$

$=34\sqrt{5}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題2]

(1)

$$\begin{array}{r}
x^3+x^2\ \ +x+1 \\
x-1\,\big)\,\overline{x^4\qquad\qquad\quad -1} \\
\underline{x^4-x^3\qquad\qquad\quad} \\
x^3\qquad\qquad\quad \\
\underline{x^3-x^2\qquad\quad} \\
x^2\qquad\quad \\
\underline{x^2-x\qquad} \\
x-1 \\
\underline{x-1} \\
0
\end{array}$$

商 x^3+x^2+x+1，余り 0

(2)

$$\begin{array}{r}
2x-\frac{1}{2}\qquad\quad \\
2x^2+4x-3\,\big)\,\overline{4x^3+7x^2-9x+3} \\
\underline{4x^3+8x^2-6x\qquad} \\
-x^2-3x+3 \\
\underline{-x^2-2x+\frac{3}{2}} \\
-x+\frac{3}{2}
\end{array}$$

商 $2x-\dfrac{1}{2}$，余り $-x+\dfrac{3}{2}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題3]

(1) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x(x+3)}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x}{x-1}$

(2) $\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4a}\div\dfrac{a^2+2a}{a-4}=\dfrac{(a+2)^2}{a(a-4)}\times\dfrac{a-4}{a(a+2)}=\dfrac{a+2}{a^2}$

(3) $\dfrac{1}{x^2-x}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(x+1)-2x}{x(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{-(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=-\dfrac{1}{x(x+1)}$

(4) $\dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{y-z}{yz}+\dfrac{z-x}{zx}=\dfrac{z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)}{xyz}$

$=\dfrac{xz-yz+xy-xz+yz-xy}{xyz}$

$=0$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題4]

(1) 等式の右辺を x について整理すると

$x^3=x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x+(a-b+c-1)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$0=a-3$，$0=-2a+b+3$，$0=a-b+c-1$

これを解いて $a=3$，$b=3$，$c=1$

(2) 等式の両辺に x^3+1 を掛けて得られる等式

$3=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

が恒等式であればよい。右辺を x について整理すると

$3=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$0=a+b$，$0=-a+b+c$，$3=a+c$

これを解いて $a=1$，$b=-1$，$c=2$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題5]

(1) [1] $|a|-|b|\geqq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|$

$+|b|^2)$

$=(a^2-2ab+b^2)-(a^2$

$-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab)\geqq 0$

よって $|a-b|^2\geqq(|a|-|b|)^2$

$|a-b|\geqq 0$，$|a|-|b|\geqq 0$ であるから

$|a|-|b|\leqq|a-b|$

[2] $|a|-|b|<0$ のとき，$|a-b|\geqq 0$ であるから $|a|-|b|<|a$

$-b|$

[1]，[2] から $|a|-|b|\leqq|a-b|$

(2) [1] $|a|-|b|\geqq 0$ のとき

両辺の平方の差を考えると

$|a+b|^2-(|a|-|b|)^2=(a+b)^2-(|a|^2-2|a||b|$

$+|b|^2)$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2$

$-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|+ab)\geqq 0$

よって $|a+b|^2\geqq(|a|-|b|)^2$

$|a|-|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であるから

$|a|-|b|\leqq|a+b|$

[2] $|a|-|b|<0$ のとき，$|a+b|\geqq 0$ であるから $|a|-|b|<|a$

$+b|$

[1]，[2] から $|a|-|b|\leqq|a+b|$

別解 (1) $|a+b|\leqq|a|+|b|$ において，a を $a-b$ でおき換えると

$|(a-b)+b|\leqq|a-b|+|b|$

すなわち $|a|\leqq|a-b|+|b|$

よって $|a|-|b|\leqq|a-b|$

(2) $|a|-|b|\leqq|a-b|$ において，b を $-b$ でおき換えると

$|a|-|-b|\leqq|a-(-b)|$

よって $|a|-|b|\leqq|a+b|$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題6]

(1) 左辺$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=$右辺

よって

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc$

$-ca)$

(2) (1) より

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2$

$+(c-a)^2\}$

よって

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2$

$+(c-a)^2\}\geqq 0$

したがって $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 章末問題7]

(1) $ab>0$，$\dfrac{16}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{16}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{16}{ab}}=8$$

よって $ab+\dfrac{16}{ab}\geqq 8$

(2) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)=ab+4+1+\dfrac{4}{ab}$

$=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

ここで，$ab>0$，$\dfrac{4}{ab}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$ab+\frac{4}{ab}+5\geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}+5=9$$

よって　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$

p.36　第２章　複素数と方程式

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習1]

(1)　実部 -3，虚部 5

(2)　実部 $-\dfrac{1}{2}$，虚部 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　実部 1，虚部 0

(4)　実部 0，虚部 -1

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習2]

(1)　x，y が実数であるから，$x-3$，$x+y$ は実数である。

よって　$x-3=0$，$x+y=0$

これを解いて　$x=3$，$y=-3$

(2)　x，y が実数であるから，$x-2y$，$2x-3y$ は実数である。

よって　$x-2y=4$，$2x-3y=7$

これを解いて　$x=2$，$y=-1$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習3]

(1)　$(2+3i)+(4+i)=(2+4)+(3+1)i$

$=6+4i$

(2)　$(-1+2i)+(3-4i)=(-1+3)+(2-4)i$

$=2-2i$

(3)　$(6+4i)-(3+2i)=(6-3)+(4-2)i$

$=3+2i$

(4)　$(2-3i)-(4-2i)=(2-4)+\{-3-(-2)\}i$

$=-2-i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習4]

(1)　$(1+2i)(4+3i)=4+3i+8i+6i^2$

$=\{4+6(-1)\}+(3+8)i$

$=-2+11i$

(2)　$(2-i)(3+4i)=6+8i-3i-4i^2$

$=\{6-4(-1)\}+(8-3)i$

$=10+5i$

(3)　$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=\{4+9(-1)\}+12i=-5+12i$

(4)　$(3+4i)(3-4i)=9-16i^2=9-16(-1)=25$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習5]

(1)　$2-3i$　　(2)　$1+i$　　(3)　$-\sqrt{3}\,i$　　(4)　$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習6]

(1)　$\dfrac{1+2i}{2+3i}=\dfrac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\dfrac{2-3i+4i-6i^2}{2^2+3^2}=\dfrac{8+i}{13}=\dfrac{8}{13}+\dfrac{1}{13}i$

(2)　$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1^2+1^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

(3)　$\dfrac{5i}{2-i}=\dfrac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{10i+5i^2}{2^2+1^2}$

$=\dfrac{-5+10i}{5}=-1+2i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習7]

(1)　$\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i$

(2)　$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\,i=3i$

(3)　$\pm\sqrt{-18}=\pm 3\sqrt{2}\,i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習8]

(1)　$\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=2\sqrt{3}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{4}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}}=2i$

(4)　$\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,i}=\dfrac{3\sqrt{5}\,i}{\sqrt{5}\,i^2}=-3i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習9]

(1)　$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

(2)　$x=\pm\sqrt{-8}=\pm\sqrt{8}\,i=\pm 2\sqrt{2}\,i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習10]

(1)　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

(2)　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot2}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{-2}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}\,i}{3}$

(3)　$x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$

$=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

(4)　$x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot4}=\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}=\sqrt{3}\pm i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習11]

(1)　2 次方程式 $x^2+5x+5=0$ の判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot5=5>0$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ。

(2)　2 次方程式 $x^2-2\sqrt{3}\,x+2=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-1\cdot2=1>0$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ。

(3)　2 次方程式 $-4x^2+x-1=0$ の判別式を D とすると

$D=1^2-4\cdot(-4)\cdot(-1)=-15<0$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ。

(4)　2 次方程式 $3x^2-4\sqrt{6}\,x+8=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2\sqrt{6})^2-3\cdot8=0$

よって，この 2 次方程式は重解をもつ。

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習12]

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(m+1)^2-4\cdot1\cdot1=m^2+2m-3=(m-1)(m+3)$

よって，2 次方程式の解は次のようになる。

$D>0$ すなわち $m<-3$，$1<m$ のとき　　異なる 2 つの実数解

$D=0$ すなわち $m=-3$，1 のとき　　重解

$D<0$ すなわち $-3<m<1$ のとき　　異なる 2 つの虚数解

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習13]

2 次方程式の 2 つの解を α，β とする。

(1)　$\alpha+\beta=-4$，　$\alpha\beta=2$

(2) $\alpha+\beta=-\dfrac{-6}{3}=2$, $\alpha\beta=\dfrac{-4}{3}=-\dfrac{4}{3}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習14]

解と係数の関係から $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2(-1)=11$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-3(-1)(-3)=-36$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3)^2-4(-1)=13$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習15]

(1) 2 つの解は，α，4α と表すことができる。

解と係数の関係から $\alpha+4\alpha=-5$, $\alpha\cdot4\alpha=m$

すなわち $5\alpha=-5$, $4\alpha^2=m$

よって $\alpha=-1$

このとき $m=4\alpha^2=4(-1)^2=4$

また，2 つの解は $\alpha=-1$, $4\alpha=4(-1)=-4$

したがって $m=4$，2 つの解は -1，-4

(2) 2 つの解は，α，$\alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から $\alpha+(\alpha+1)=-5$, $\alpha(\alpha+1)=m$

すなわち $2\alpha+1=-5$, $\alpha(\alpha+1)=m$

よって $\alpha=-3$

このとき $m=\alpha(\alpha+1)=-3(-3+1)=6$

また，2 つの解は $\alpha=-3$, $\alpha+1=-3+1=-2$

したがって $m=6$，2 つの解は -3，-2

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習16]

(1) 2 次方程式 $x^2-3x-2=0$ の解は

$$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

よって $x^2-3x-2=\left(x-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$

(2) 2 次方程式 $2x^2-2x-3=0$ の解は

$$x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

よって $2x^2-2x-3=2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$

(3) 2 次方程式 $x^2+4x+6=0$ の解は

$$x=-2\pm\sqrt{2}\,i$$

よって $x^2+4x+6=\{x-(-2+\sqrt{2}\,i)\}\{x-(-2-\sqrt{2}\,i)\}$

$=(x+2-\sqrt{2}\,i)(x+2+\sqrt{2}\,i)$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習17]

(1) 解の和は $2+(-1)=1$

解の積は $2\cdot(-1)=-2$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-x-2=0$

(2) 解の和は $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

解の積は $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-4x+1=0$

(3) 解の和は $(1+2i)+(1-2i)=2$

解の積は $(1+2i)(1-2i)=1^2+2^2=5$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-2x+5=0$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習18]

(1) 求める 2 数は，次の 2 次方程式の解である。

$x^2+2x+6=0$

これを解くと $x=-1\pm\sqrt{5}\,i$

よって，求める 2 数は $-1+\sqrt{5}\,i$，$-1-\sqrt{5}\,i$

(2) 求める 2 数は，次の 2 次方程式の解である。

$x^2-3x+3=0$

これを解くと $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって，求める 2 数は $\dfrac{3+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{3}\,i}{2}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習19]

解と係数の関係から $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$

(1) $(1-\alpha)+(1-\beta)=2-(\alpha+\beta)=2-3=-1$

$(1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta=1-3+(-1)=-3$

よって，$1-\alpha$，$1-\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2+x-3=0$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(-1)=11$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

よって，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-11x+1=0$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 練習20]

この 2 次方程式の 2 つの解を α，β とし，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(m-3)^2-1\cdot4m=m^2-10m+9=(m-1)(m-9)$

また，解と係数の関係により $\alpha+\beta=-2(m-3)$，$\alpha\beta=4m$

(1) この 2 次方程式が，異なる 2 つの正の解をもつのは，次が成り立つときである。

$D>0$ で，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$

$D>0$ より $(m-1)(m-9)>0$

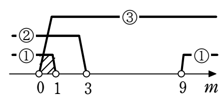
よって $m<1$, $9<m$ ……①

$\alpha+\beta>0$ より $-2(m-3)>0$ よって $m<3$ ……②

$\alpha\beta>0$ より $4m>0$ よって $m>0$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$0<m<1$



(2) この 2 次方程式が，異なる 2 つの負の解をもつのは，次が成り立つときである。

$D>0$ で，$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

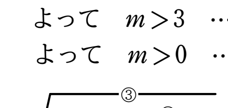
$D>0$ より $m<1$, $9<m$ ……①

$\alpha+\beta<0$ より $-2(m-3)<0$ よって $m>3$ ……②

$\alpha\beta>0$ より $4m>0$ よって $m>0$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$m>9$



(3) この 2 次方程式が，正の解と負の解をもつのは，$\alpha\beta<0$ が成り立つときである。

よって，$4m<0$ から $m<0$

p.50 問題

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題1]

(1) x，y が実数であるから，$x-3y$，$2x+y$ は実数である。

よって $x-3y=1$, $2x+y=-12$

これを解いて $x=-5$, $y=-2$

(2) 等式の左辺を変形すると

$$(5x-y)+(x+5y)i=13+13i$$

x, yが実数であるから，$5x-y$, $x+5y$は実数である。

よって　$5x-y=13$, $x+5y=13$

これを解いて　$x=3$, $y=2$

別解 (2) $x+yi=\dfrac{13+13i}{5+i}=\dfrac{13(1+i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}$

$$=\frac{13(5-i+5i-i^2)}{5^2+1^2}$$

$$=\frac{13(6+4i)}{26}=3+2i$$

よって　$x=3$, $y=2$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題2]

(1) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{(-1)^2-2\sqrt{3}\,i+(\sqrt{3}\,i)^2}{2^2}=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i-3}{4}$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

(2) $i+\dfrac{1}{i}=i+\dfrac{i}{i^2}=i-i=0$

(3) $i+i^2+i^3+i^4=i+i^2+i\cdot i^2+(i^2)^2=i-1-i+1=0$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題3]

(1) $x=\dfrac{-(-\sqrt{5})\pm\sqrt{(-\sqrt{5})^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}\,i}{4}$

(2) 展開して整理すると

$2x^2+1=0$　すなわち　$x^2=-\dfrac{1}{2}$

よって　$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,i=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

別解 (2) $x+1=A$ とおくと　$2A^2-4A+3=0$

よって　$A=\dfrac{2\pm\sqrt{2}\,i}{2}=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

したがって　$x=A-1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題4]

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=1$

(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}\cdot(-2)=-3$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題5]

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=7$, $\alpha\beta=-1$

(1) $(\alpha-2)+(\beta-2)=(\alpha+\beta)-4=7-4=3$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-1-2\cdot7+4=-11$

よって，$\alpha-2$, $\beta-2$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-3x-11=0$$

(2) $\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{2\beta+2\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{2\cdot7}{-1}=-14$

$\dfrac{2}{\alpha}\cdot\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{4}{\alpha\beta}=-4$

よって，$\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\beta}$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+14x-4=0$$

(3) $(\alpha+\beta)+\alpha\beta=7+(-1)=6$

$(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=7\cdot(-1)=-7$

よって，$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-6x-7=0$$

[328改訂版 高等学校 数学Ⅱ 問題6]

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot(2-m)=m^2+4m-8$$

2 次方程式が虚数解をもつのは $D<0$ のときであるから

$$-2-2\sqrt{3}<m<-2+2\sqrt{3}$$

2 次方程式 ① の解は　$x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2+4m-8}}{2}$

虚数解の実部は $-\dfrac{m}{2}$ であるから

$-\dfrac{m}{2}=1$　すなわち　$m=-2$

このとき，虚数解は　$x=1\pm\dfrac{\sqrt{(-2)^2+4\cdot(-2)-8}}{2}=1\pm\sqrt{3}\,i$

答 (ア) 2　(イ) 2　(ウ) 3　(エ) 2　(オ) 3